dnevi slovenske informatike

"Ustvarimo nove rešitve!"

Kongresni center Grand hotel Bernardin
Portorož | Slovenija | 16. - 18. april 2012

19. konferenca
Dnevi slovenske informatike

MODERNI ALGORITMI OPTIMALNEGA UPRAVLJANJA

Lado Lenart, Jan Babič

slovensko društvo informatika

VSEBINA

Osnovni pojmi o parcialnih dif. enačbah 1-reda, metoda karakteristik

Primer metode karakteristik, Hamilton-Jacobi-Bellman enačba HJBE

Zveza med HJBE in optimalnim upravljanjem

Primer HJBE

Spektralne metode

MATLAB program 'GPOPS' za optimalno upravljanje

Optimalna trajektorija dvojnega manipulatorja

Zaključek

Osnovni pojmi, metoda karakteristik

Osnovni pojmi:

Zveza s parcialno diferencialno enačbo prvega reda HJBE : reševanje te enačbe po metodi karakteristik
navadne (nelinearne) PDE prvega reda :
Notacija:

$x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \Omega; \quad \Omega \in \mathbb{R}^n;$ področje statusnih variabel

PDE 1- reda: $F(Du, u, x) = 0; \quad D \ldots$ operator parcialnih odvodov; $u(x)$ rešitev PDE

Robni pogoj (Cauchy, Dirichlet, mešani): $F = g$ na robu $\partial\Omega$

Ekvivalenten zapis PDE: $F = F(p, z, x); \quad p \in \mathbb{R}^n; z \in \mathbb{R}; x \in \bar{\Omega}$

Metoda karakteristik:

PDE skušamo pretvoriti v primeren sistem navadnih diferencialnih ebačb (ODE). *u naj* reši PDE v neki fiksni točki *x.* Krivulja iz te točke naj bo parametrizirana z *x(s).* Na vsakem mestu: ustreza funkciji *F* v poziciji in odvodih. Na robu področja je vrednost funkcije znana zaradi robnega pogoja. Tako dobimo karakteristične enačbe (v vektorski notaciji):

$$\dot{p} = -D_x F(p, z, x) - D_z F(p, z, x).p$$

$$\dot{z} = D_p F(p, z, x)$$

$$\dot{x} = D_p F(p, z, x)$$

Primer metode karakteristik, HJBE

Primer metode karakteristik: enostavna numerika

$x_1 u_{x_2} - x_2 u_{x_1} = u \in U; U = \{x_1 > 0; x_2 > 0\}; \Gamma = \{x_1 > 0; x_2 = 0 \in \partial U\}$

$\Rightarrow$ karakteristika ODE: $\dot{x}_1 = -x_2; \dot{x}_2 = x_1; \dot{z} = z;$

$\Rightarrow$ rešitev ODE: $x_1(s) = x_0 \cos(s); x_2(s) = x_0 \sin(s)!!!; z = z_0 e^s = g(x_0)e^s$

$\Rightarrow$ končna rešitev: $u(x_1, x_2) = g\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right).\exp\left(\arctan\left(x_2 / x_1\right)\right)$

Lokalna rešitev, lokalni eksistenčni teorem, HJBE enačba:

$$G(Du, u_t, u, x, t) = u_t + H(Du, x) = 0$$

$$\dot{x} = D_p H(p, x)$$
$$\dot{p} = -D_x H(p, x)$$

HJBE (iz mehanike) v najenostavnejši obliki:

$$u_t + H(Du) = 0$$

kompleten integral (obsojata še singularni in splošni)

$$u(x, t, a, b) = a.x - tH(a) + b$$

Zveza med HJBE in optimalnim upravljanjem 1

$$\inf_{\alpha \in A} J(s, y, \alpha) = \inf_{\alpha \in A} \left\{ \int_s^T L(t, x(t), \alpha(t))\, dt + q(x(T)) \right\};$$

s začetek integracije; α kontrolni vektor L integralni kriterij q terminalni kriterij
T fiksni končni čas J kriterij (value function)

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \alpha(t)); \quad t \in [\ s, T]$$

$$x(s) = y$$

Eksplicitna označitev optimalnosti z '$*$': iz principa DP sledi ..

$$u(s, y) = u\left(s + \delta s, x^*_{(s,y)}(s + \delta s)\right) + \int_s^{s+\delta s} L\left(t, x^*_{(s,y)}(t), \alpha^*_{(s,y)}(t)\right) dt =$$

$$= \inf_{\alpha \in A} \left\{ u\left(s + \delta s, x_{(s,y)}(s + \delta s)\right) + \int_s^{s+\delta s} L\left(t, x_{(s,y)}(t), \alpha_{(s,y)}(t)\right) dt \right\}$$

Zveza med HJBE in optimalnim upravljanjem 2

Razvoj (Taylor) levi sumand zadnje enačbe

$$u\left(s+\delta s, x^*_{(s,y)}(s+\delta s)\right) = u(s,y) + \nabla u(s,y)\cdot\left(x(s,y)-y\right) + \frac{\partial u(s,y)}{\partial s}\delta s =$$

$$= u(s,y) + \nabla u(s,y)\cdot f\left(s,y,\alpha^*_{(s,y)}(s)\right) + \frac{\partial u(s,y)}{\partial s}\delta(s)$$

srednja vrednost drugega sumanda:

$$\int_s^{s+\delta s} L\left(t, x^*_{(s,y)}(t), \alpha^*_{(s,y)}(t)\right) dt = L\left(s,y,\alpha^*_{(s,y)}(s)\right)\delta s$$

Zadnji dve enačbi vstavimo v osnovno enačbo: rezultat

$$u(s,y) = \inf_{\alpha\in A}\left\{u(s,y) + \nabla u(s,y)\cdot f\left(s,y,\alpha(s)\right)\delta s + \frac{\partial u(s,y)}{\partial s}\delta s + L\left(s,y,\alpha(s)\right)\right\}$$

terma $u(s,y)$ na desni se krajšata, ostane:

$$0 = \frac{\partial u(s,y)}{\partial s} + \inf_{\alpha\in A}\left\{\nabla u(s,y). f\left(s,y,\alpha(s)\right)\delta s + L\left(s,y,\alpha(s)\right)\delta s\right\} \Rightarrow /\delta s, \cdot(-1)$$

$$0 = -\frac{\partial u(s,y)}{\partial s} + \sup_{\alpha\in A}\left\{-\nabla u(s,y)\cdot f\left(s,y,\alpha(s)\right) - L\left(s,y,\alpha(s)\right)\right\}$$

Primer HJBE

$$u(x,t)=\min\left[\int_t^T (\alpha(s))^2 ds+(x(T))^2\right] \quad s.t. \quad \dot{x}(s)=x(s)+\alpha(s)$$

$$-u_t=\min_\alpha\{\alpha^2+u_x[x+\alpha]\}\rightarrow\frac{d}{d\alpha}\{\alpha^2+u_x[x+\alpha]\}=0\Rightarrow$$

$$\alpha=-u_x/2;\Rightarrow$$

$-p_t=xp_x-p\cdot x^2/4;$ sugestija iz oblike terminala: $u(T)=x^2(T): \quad u(t,x)=A(t)x^2$

$$\Rightarrow u(x,t)=A(t)x^2\Rightarrow$$

$\dot{A}(t)+2A(t)-(A(t))^2=0;$ Bernoulli ODE, analitična rešitev:

$$A(t)=\frac{2}{1+\exp(2(t-T))} \quad \Rightarrow \quad u(x,t)=\frac{2x^2}{1+\exp(2(t-T))}$$

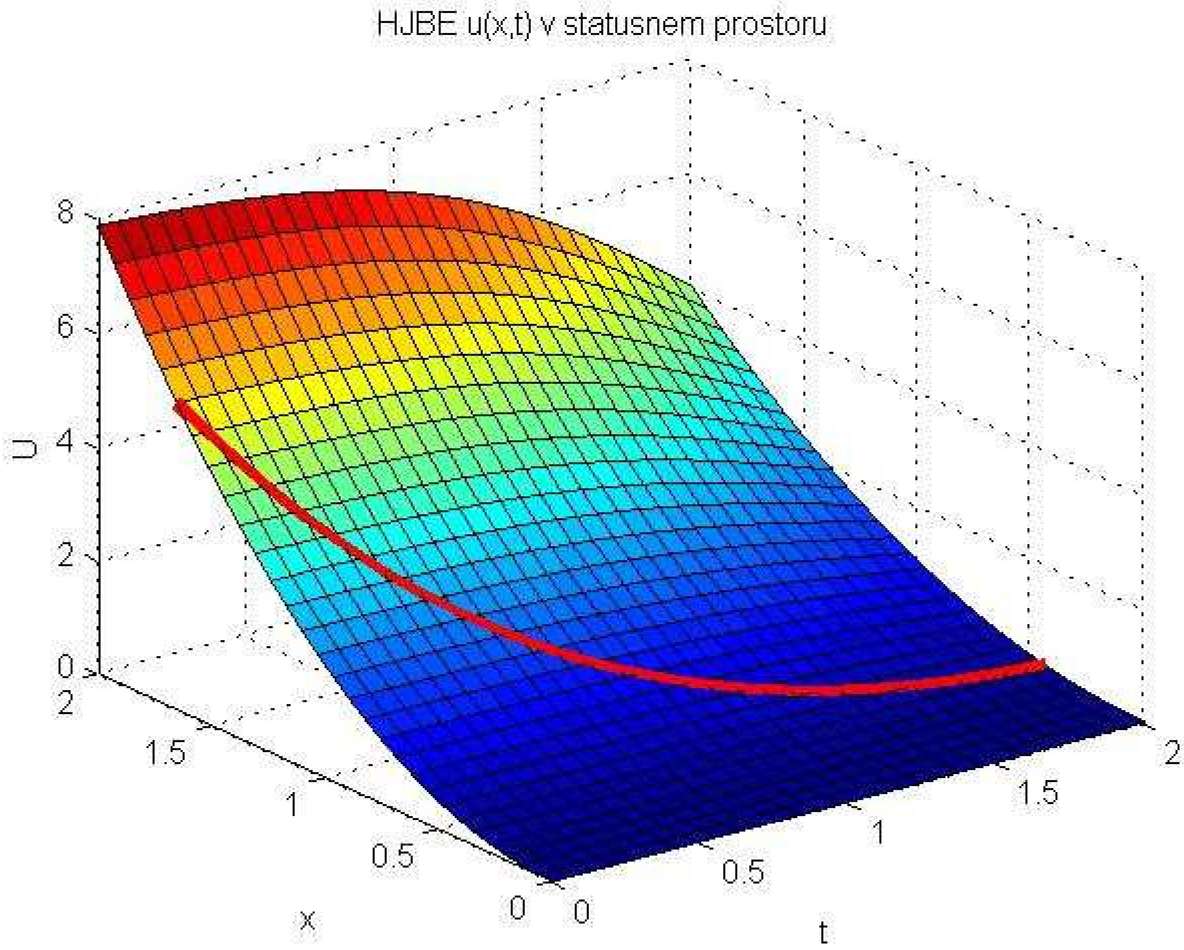
z znanim $u(x,t)$ je račun karakteristik trivialen, začetne pogoje odčitamo na krivulji

$(x_0=1.6522; p_0=6.5016; z_0=6.38)$

Enačbe karakteristik:

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=x-\frac{p}{2}; \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}=-p; \quad \dot{z}=-\frac{1}{4}p^2$$

Grafična rešitev primera z vrisano karakteristiko:



Karakteristika=začetni; Optimalna kontrola=robni problem

proces: $\dot{x} = f(x,\alpha,t)$; kriterij: $J = \varphi(x,t)|_{t=T} + \int_0^T L(x,\alpha,t)\,dt$

$J = \varphi + \int \left[L + p(f - \dot{x}) \right] dt$ vpeljava $H = L + p \cdot f$; integracija per partes

$J = \varphi - p(T)x(T) + p(0)x(0) + \int [H + \dot{p}x]\,dt$

variacijski račun : !!!!!!!!!!!!: variacija α, t_0, T fiksna

$$\delta J = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - p \right) \delta x \right]_{t=T} + [p \cdot \delta x]_{t=0} + \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p} \right) \delta x + \frac{\partial H}{\partial \alpha} \delta \alpha \right] dt$$

choice: $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} - p \frac{\partial f}{\partial x}$; BC: $p(T) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_T$

$$\delta J_\alpha = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial H}{\partial \alpha}(x,\alpha,p,t) \right]^T \delta \alpha(t)\,dt$$

$$\delta \alpha(t) = \alpha^{i+1}(t) - \alpha^i(t) = -\tau \frac{\partial H^i}{\partial \alpha}(t); \quad t \in \left[t_0, t_f \right]; \tau > 0; \tau \text{ 'majhen}$$

hkrati smo dobili napotek za gradientni postopek

Optimalna kontrola= vzorec Eulerjeve transkripcije

objektna funkcija

$$J=\Phi\left(x(T),T\right)+z(T); \quad \dot{z}=g\left(x(t),\alpha(t),t\right)$$

ekvidistantna delitev časovnega intervala: $t_0=t_1<\ldots<t_n=T; \quad h=T/(n-1)$

aproksimacija objektne funkcije:

$$\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{h}=f\left(x(t_i),\alpha(t_i),t_i\right)$$

na isti način aproksimacija funkcije z

diskretizacija objektne funkcije:

$$J=\Phi\left(x(t_n)\right)+\sum_{k=1}^{n-1} g\left(x(t_k),\alpha(t_k),t_k\right)\cdot h_k$$

robni pogoji:

$$\Psi\left(x_1,t_1,x_n,t_n\right)=0$$

sledi uporaba statičnega nelinearnega programa

problem natančnost -> naslednja stopnja Runge-Kutta integracija

Spektralne metode-1

Legendre pseudospektralna metoda (LGL)

LGL - točke $\tau \in [-1,+1] \Rightarrow t = \frac{t_f - t_0}{2}\tau + \frac{t_f + t_0}{2}$

objektna funkcija:

$$J=\Phi\left(x(1),t_f\right)+\frac{t_f-t_0}{2}\int_{-1}^{+1} g\left(x(\tau),u(\tau),\tau\right)d\tau$$

proces: $\frac{2}{t_f - t_0}\frac{dx}{d\tau} = f\left(x(\tau),\alpha(\tau),\tau\right)$

robni pogoji: $\Phi\left(x(-1),t_0,x(1),t_f\right)=0$

stanja in kontrole: aproksimacija z Lagrange interpolacijskimi polinomi

$$x(t) \approx X(t) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\cdot L_i(t); \quad \alpha(t) \approx \mathrm{A}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) L_i(t)$$

odvod stanja = točen odvod interpolacijskega polinoma:

$$\frac{dx}{dt}(t_k) \approx \frac{dX}{dt}(t_k) = \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\cdot D_{ki}; \quad D_{ki} = \frac{dL_i}{dt}(t_k)$$

Spektralne metode-2

aproksimacija dinamičnih enačb na kolokacijskih točkah:

$$\frac{2}{t_f - t_0} \sum_{i=1}^{n} D_{ki} X_i = f\left(X_k, A_k, t_k\right), \quad k = 1, \ldots, n$$

aproksimacija robnih pogojev:

$$\phi\left(X_1, t_0, X_n, t_f\right) = 0$$

aproksimacija objektne funkcije:

$$J = \Phi\left(X_n, t_f\right) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^{N} g\left(X_k, U_k, t_k\right) \cdot w_k$$

w_k ... LGL integracijske (utežne) funkcije

sledi uporaba stacionarnega optimizacijskega algoritma

Program GPOPS : zgradba

program lahko zastavljen v več fazah (primer: večstopenjska raketa)

uporabnikove funkcije (za vsako fazo)

1) objektna funkcija
2) desna stran procesnih diferencialnih enačb in omejitev trajektorije
3) robni pogoji (kot dogodki)
4) medfazne povezave

specifikacija zgornjih in spodnjih omejitev :

a) za začetni in končni čas faze
b) za stanja v naslednih trenutkih: začetek faze, med fazo, na koncu faze
c) za funkcije upravljanja
d) za statične parametre
e) za omejitev trajektorije
f) za robne pogoje
g) za trajanje faze
h) za pogoje prehajanja med fazami

Program GPOPS : rešitve: dvojni manipulator 1

splošna enačba dinamike robota:

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(\vartheta)\,\ddot{\vartheta}_j + \sum_{j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial \vartheta_k}\dot{\vartheta}_j\dot{\vartheta}_k - \frac{1}{2}\frac{\partial M_{kj}}{\partial \vartheta_i}\dot{\vartheta}_k\dot{\vartheta}_j\right) + \frac{\partial V}{\partial \vartheta_i}(\vartheta) = \gamma_i$$

i …indeks člena robota (baza $i = 1$)

M_{ij} …inercialna matrika člena

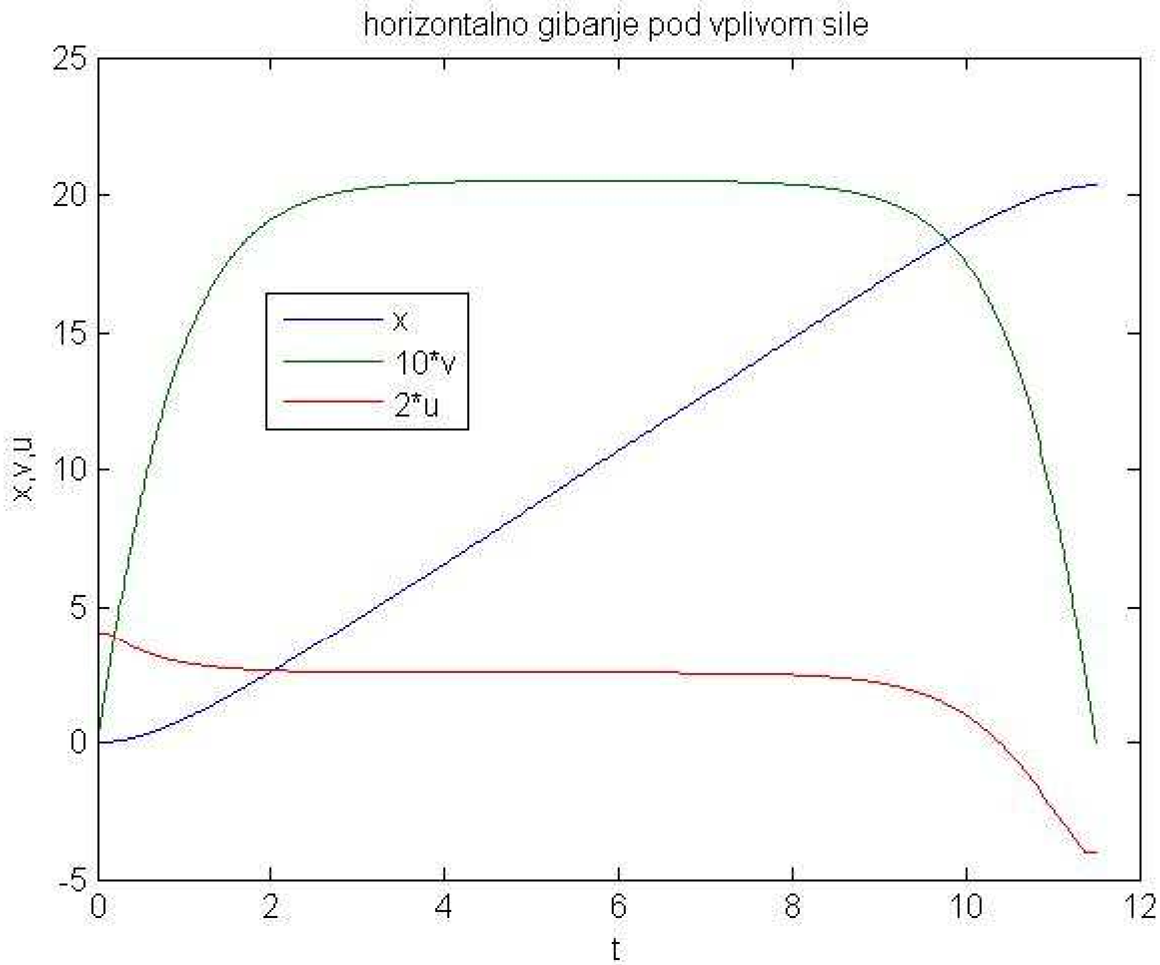
ϑ… generalizirane koordinate

V …potencialna energija

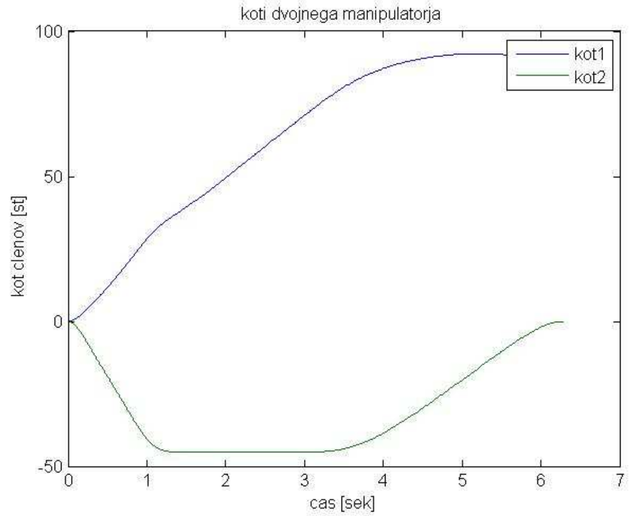
γ_i …momenti ali sile, ki delujejo na robotski člen

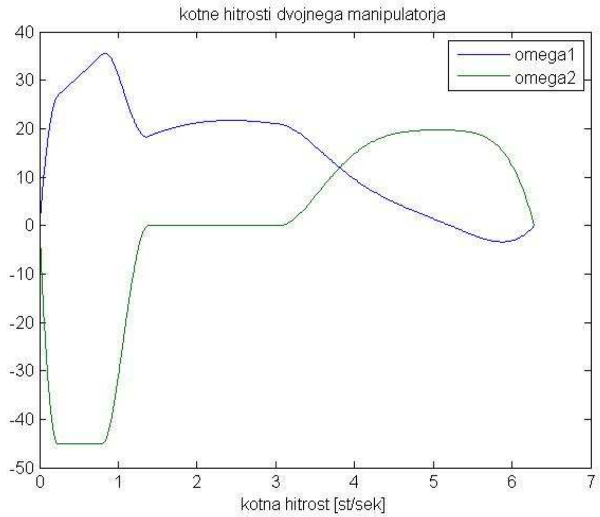
Coriolisova matrika

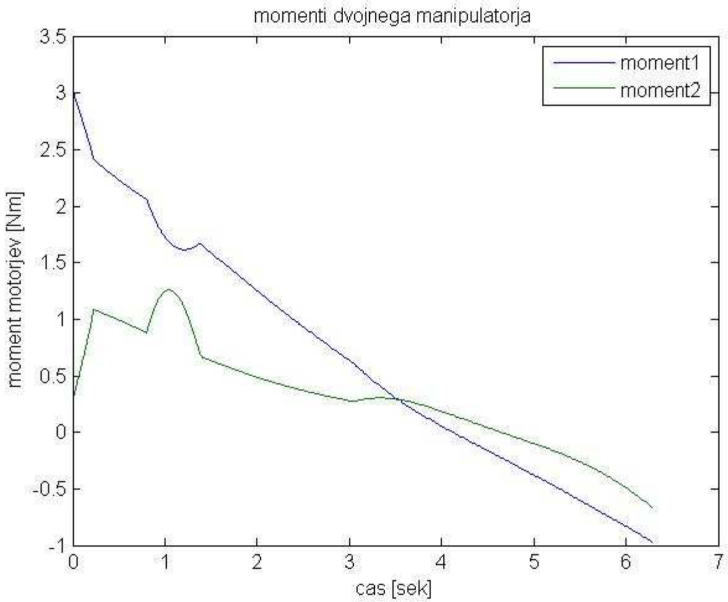
Program GPOPS : linijsko gibanje masne točke



Program GPOPS : rešitve 'gpops' : dvojni manipulator 2







Zaključek

Rešitve nelinearnih PDE z metodo karakteristik. Tako splošno PDE zapišemo kot HJBE enačbo (poenostavljene karakteristične enačbe). Prehod na optimalno upravljanje z gradientnimi postopki. Veliko število algoritmov optimalne kontrole (manj zaprtozančnih). Direktni in indirektni postopki temeljijo na izpopolnjenih metodah transkripcije v NLP problem. Eulerjeva shema transkripcije, Runge Kutta metoda transkripcije, pseudo spektralne metode transkripcije: razred direktne kolokacije, pri kateri problem OCP prepišemo v NLP tako, da parametriziramo statusne in kontrolne variable z uporabo globalnih ali lokalnih baz (Lagrangeovi polinomi) . Globalna in lokalna aproksimacija po Gauss Lobatto Radau tockah. Uporaba kolokacijskih metod pri diferencialno- algebraičnih enačbah, uporaba vozliščnih vrednosti : Gausova kvadratura. Aproksimacija z globalnimi polinomi obenem s kolokacijo omogoča eksponencialno konvergenco pri 'gladkih' problemih.

Navidez moteča majhna dimenzija statusnega prostora.

Izkušnje s programom GPOPS: uporaba pri tristopenjskih manipulatorjih, kar (geometrija, teže) nekako ustreza normalnemu robotu s 6 stopnjami prostosti.

Hvala za vašo pozornost !

Vprašanja?

Pripombe?

Predlogi?